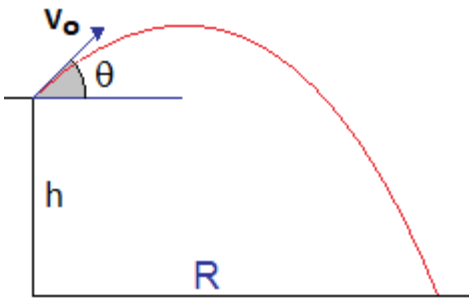
Física I

Distancia Máxima, Terreno a Desnivel

Problema 1.- Calcular el ángulo Θ que da la máxima distancia R para un proyectil disparado con una velocidad inicial v_o desde una altura h sobre el suelo.



Solución:

Para resolver el problema notamos en la dirección vertical lo siguiente:

La velocidad inicial es $v_{y1} = v_o \sin\theta$

El valor final de y es $y = -h$

Calculamos el tiempo con la ecuación: $y = v_{y1}t - \frac{1}{2}gt^2$

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_o t\sin\theta - h = 0 \rightarrow t = \frac{v_o\sin\theta + \sqrt{v_o{}^2\sin^2\theta + 2gh}}{g}$$

Con este tiempo encontramos la ecuación de la distancia al sustituir en la ecuación de movimiento horizontal

$$R = x = v_{1x}t = v_o t\cos\theta$$

Reemplazando t

$$R = \frac{v_o{}^2}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + \frac{2gh}{v_o{}^2}}\right)\cos\theta$$

Hagamos un cambio de variable: $z = \frac{2gh}{v_o{}^2}$

De tal modo que la ecuación es $R = \frac{v_o{}^2}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + z}\right)\cos\theta$

Para encontrar el máximo tomamos la derivativa con respecto a θ

$$\frac{dR}{d\theta} = \frac{v_o^{\,2}}{g}\left[-(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + z})\sin\theta + \left(1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + z}}\right)\cos^2\theta \right]$$

Para ser un máximo esta expresión debe ser cero:

$$(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + z})\sin\theta = \left(1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + z}}\right)\cos^2\theta$$

$$\left(1 + \frac{\sqrt{\sin^2\theta + z}}{\sin\theta}\right)\sin^2\theta = \left(1 + \frac{\sin\theta}{\sqrt{\sin^2\theta + z}}\right)\cos^2\theta$$

Luego de simplificar obtenemos

$$\frac{1 - 2\sin^2\theta}{\sin^2\theta} = z \rightarrow \sin\theta = \sqrt{\frac{1}{z+2}}$$

Y la solución es $\theta = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{z+2}}\right) = \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{1}{2 + \frac{2gh}{v_o^{\,2}}}}\right)$

Otra forma de escribir la ecuación es:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_o}{\sqrt{v_o^{\,2} + 2gh}}\right)$$

Notar que el numerador es la rapidez inicial y el denominador es la rapidez final (justo antes de golpear el piso).

Consideremos algunos casos:

a) h=0, este es caso conocido de máxima distancia cuando el terreno es nivelado.

b) h<0, el numerador será menor al denominador y por ello el ángulo debe ser mayor a 45º. ¿Podemos imaginar que h<0?

c) Si el valor del denominador se acerca a cero el ángulo se acercará a 90º en cuyo momento toda la velocidad es usada en alcanzar la altura h y la distancia R será cero.

d) Si h>0, como se muestra en la figura, el ángulo para máxima distancia será menos de 45º.

Para un ejemplo numérico veamos con g=9.8m/s^2, v_o=5m/s y h=4m

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{5^2 + 2\times 9.8\times 4}}\right) = \mathbf{26.2}^\circ$$

Relación entre ángulos

También se puede probar una curiosa propiedad: La velocidad horizontal es

$$v_{x1} = v_o \cos\left(\tan^{-1}\frac{v_o}{\sqrt{v_o^{\,2} + 2gh}}\right) = v_o \frac{\sqrt{v_o^{\,2} + 2gh}}{\sqrt{2v_o^{\,2} + 2gh}}$$

Y el ángulo de la velocidad final con la horizontal será:

$$\theta_{final} = -\cos^{-1}\left(\frac{v_{x1}}{\sqrt{v_o^{\,2} + 2gh}}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{v_o}{\sqrt{2v_o^{\,2} + 2gh}}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{v_o^{\,2} + 2gh}}{v_o}\right)$$

Notamos que esta tangente es el negativo de la inversa de la tangente inicial.

Esto significa que las velocidades inicial y final hacen un ángulo de 90°. Esto es claro en el caso de terreno a nivel donde los ángulos son ±45º, pero también es cierto en todos los casos de mayor distancia para cualquier valor de h.

Máxima distancia para terreno desnivelado

Teniendo el ángulo podemos hallar ahora la distancia R:

$$R = \frac{v_o}{g}\sqrt{v_o^{\,2} + 2gh}$$

Notamos una situación adicional. Si R y h están dados podemos calcular la mínima rapidez o energía cinética para conectar los puntos con una parábola. Podemos encontrar v_o en la ecuación anterior.

$$v_o = \sqrt{g(h + \sqrt{h^2 + R^2})}$$

O también

$$v_o = \sqrt{g(h + D)}$$

Donde D es la distancia entre el punto inicial y el final

Veamos dos casos:

a) h=0, la velocidad mínima es $v_o = \sqrt{gR}$, lo que se obtiene con un ángulo de 45º en la ecuación de distancia cuando el terreno es nivelado.

b) R=0, la velocidad mínima para alcanzar la altura h es $v_o = \sqrt{2gh}$, que también podemos obtener con consideraciones de energía o ecuaciones cinemáticas.