

Física I

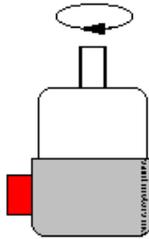
Energía cinética

Energía cinética en movimiento lineal $K.E. = \frac{1}{2}mv^2$

Energía cinética en movimiento rotacional $K.E. = \frac{1}{2}I\omega^2$

Energía cinética promedio debido a movimiento térmico en un gas $\langle KE \rangle = \frac{3}{2}k_B T = \frac{1}{2}mv_{rms}^2$

Problema 1.- Calcular la energía cinética almacenada en el rotor de un motor eléctrico cuyo radio es 0.25m, masa 16kg y velocidad angular 3600 rpm. Aproximar el momento de inercia del rotor al de un cilindro sólido, $\frac{1}{2}MR^2$.



Solución: Primero convertimos la velocidad angular a radianes por segundo

$$\omega = 3600 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}} \right) = 377 \text{ rad/s}$$

Luego:

$$K.E._{\text{rotacional}} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}MR^2 \right) \omega^2 \quad K.E._{\text{rotacional}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 16 \times 0.25^2 \right) 377^2 = \mathbf{35,500 \text{ J}}$$

Problema 1a.- Calcular la energía cinética almacenada en un CD de audio cuando rota a su máxima velocidad angular de 500 rpm. Aproximar el momento de inercia del CD al de un disco, $\frac{1}{2}MR^2$,

Considerar su masa 0.015kg y su radio 0.060m

Solución: La energía cinética rotacional está dada por: $K.E. = \frac{1}{2}I\omega^2$

Así que necesitamos calcular el momento of inercia y la velocidad angular:

Momento de inercia:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2}(0.015 \text{ kg})(0.06 \text{ m})^2 = 2.7 \times 10^{-5} \text{ kgm}^2$$

$$\text{Si rota a 500 rpm, } \omega = 500 \text{ rpm} = 500 \frac{\text{rev}}{\text{min}} \left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \right) \left(\frac{2\pi}{1 \text{ rev}} \right) = 52.4 \text{ rad/s}$$

La energía cinética es: $K.E. = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (2.7 \times 10^{-5}) (52.4)^2 = \mathbf{0.037 \text{ J}}$

Problema 1b.- Calcular la energía cinética total de un barril que rueda sin deslizarse a 4.0m/s si su masa es 120kg y su radio es 0.35m.

Asumir que es un cilindro sólido.

Momento de inercia de un cilindro sólido $= \frac{1}{2} MR^2$

Solución: Hay dos tipos de energía cinética rotacional y de traslación, así que sumándolas tenemos:

$$K.E. = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} MR^2 \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 = \frac{3}{4} Mv^2$$

Donde hemos reemplazado la ecuación del momento de inercia y $R\omega = v$, así que la energía cinética es:

$$K.E. = \frac{3}{4} Mv^2 = \frac{3}{4} (120\text{kg})(4\text{m/s})^2 = \mathbf{1,440 \text{ J}}$$

Problema 2.- Calcular la rapidez rms de una molécula en un gas que tiene masa de 75 uma si la temperatura es 37°C.

1 uma = 1.66×10^{-27} kg

Solución: La energía cinética es dada por

$$K.E. = \frac{mv^2}{2},$$

Pero también sabemos que $\langle K.E. \rangle = \frac{3}{2} k_B T$, así que combinando las ecuaciones, la rapidez promedio:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T \rightarrow v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 310}{75 \times 1.66 \times 10^{-27}}} = \mathbf{320 \text{ m/s}}$$

Problema 2a.- A temperatura ambiente ($T=300 \text{ K}$), un átomo de helio con masa de 4 uma, típicamente tiene energía cinética de $6.21 \times 10^{-21} \text{ J}$ en la fase gaseosa. Calcular su rapidez rms.

1 uma = 1.66×10^{-27} kg

Solución: La energía cinética es de traslación:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2} k_B T \rightarrow v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

$$v = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3 \times 1.38 \times 10^{-23} \times 300}{4 \times 1.66 \times 10^{-27}}} = \mathbf{1,370 \text{ m/s}}$$

Problema 2b.- En principio, ¿es posible separar N₂ del O₂ por difusión? ¿Cuál es la razón de velocidades de estas moléculas a temperatura ambiente?

Solución: En principio si, podemos separar N₂ del O₂ por difusión, porque las moléculas de nitrógeno son más rápidas que el oxígeno por esta razón:

$$\frac{v_{\text{Nitrógeno}}}{v_{\text{Oxígeno}}} = \sqrt{\frac{32}{28}} = \mathbf{1.07}$$

Problema 2c.- Calcular la rapidez rms de las moléculas de hidrógeno presentes en la atmósfera a T=27°C.

Solución: Ya que

$$\text{K.E.} = \frac{3}{2} pV \rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} N k_B T \rightarrow v = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}}$$

En esta ecuación T=27+273=300K, así que:

$$v = \sqrt{\frac{3 k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3(1.38 \times 10^{-23})(300)}{2 \times 1.66 \times 10^{-27}}} = \mathbf{1,930 \text{ m/s}}$$

Problema 3.- Calcular la energía cinética almacenada en una molécula de hidrógeno que tiene momento de inercia I=9.56×10⁻⁴⁸kgm² y está en su primer estado excitado de rotación que tiene momento angular al cuadrado L² = 2ħ², donde ħ = 1.05×10⁻³⁴ Js

Solución: La energía cinética de rotación está dada por: $E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$, así que, con los valores dados:

$$E = \frac{L^2}{2I} = \frac{2(1.05 \times 10^{-34} \text{ Js})^2}{2(9.56 \times 10^{-48} \text{ kgm}^2)} = \mathbf{1.16 \times 10^{-21} \text{ J}}$$

Esta es una cantidad muy pequeña, pero convertida a temperatura (dividiendo por la constante de Boltzmann) nos da 84K! que es grande comparado con otras moléculas.

Problema 4.- ¿Quién tiene más energía cinética: Un atleta de 80kg corriendo a 8.5m/s o una bala de 7g a 350 m/s?

Solución:

$$K.E._{atleta} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(80kg)(8.5m/s)^2 = \mathbf{2,890 J}$$

$$K.E._{bala} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.007kg)(350m/s)^2 = \mathbf{429 J}$$

¡El atleta tiene más energía cinética!

Problema 5.- Una persona se ejercita en una máquina de tipo escalera por media hora. El trabajo realizado es equivalente a subir una verdadera escalera de 150 metros. Calcular cuantas calorías consumen estos ejercicios si la eficiencia es de 20% y la masa de la persona es 60kg.

Solución: Al subir una altura real de 150 metros, el trabajo realizado es contra la gravedad y se calcula multiplicando el peso por la altura:

$$W = 60kg \times 9.8 \frac{m}{s^2} \times 150m = 88,200J$$

Sin embargo, como la eficiencia es 20%, la energía necesaria para realizar este trabajo es

$$E = \frac{W}{\eta} = \frac{88,200}{20\%} = 441,000J$$

Y finalmente convirtiendo a calorías

$$E = 441,000J \left(\frac{1\text{Cal}}{4,184J} \right) = \mathbf{105 Cal}$$