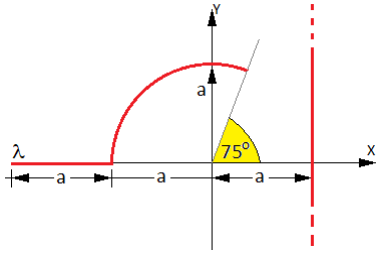
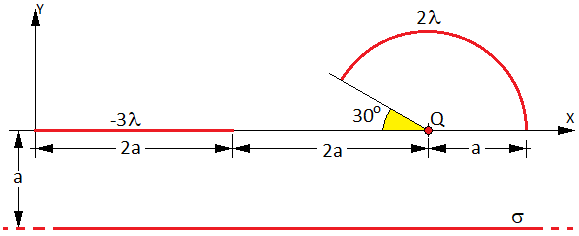
Física II

Más problemas de electrostática

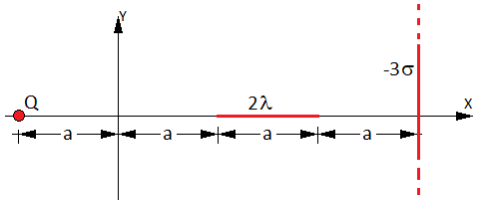
Problema 1.- Hallar el campo eléctrico en el origen de coordenadas debido a
a) Un alambre recto de densidad lineal de carga λ
b) Un arco de círculo de radio a y densidad lineal de carga λ
c) Un alambre recto infinito de densidad lineal de carga λ.



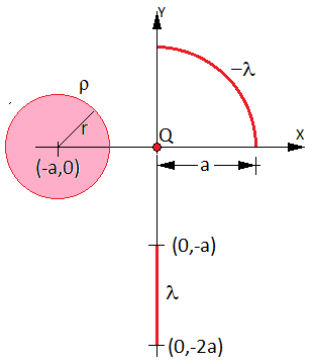
Problema 2.- Determinar la fuerza eléctrica sobre la carga puntual Q (+) ubicada en (4a, 0), debido al:
a) Alambre de longitud 2a y densidad lineal de carga -3λ
b) Alambre doblado en forma de arco de circunferencia con densidad 2λ y radio a
c) Plano infinito de densidad superficial de carga σ paralelo al plano xz



Problema 3.- Se tiene un plano infinito con densidad superficial -3σ (C/m^2), una carga puntual Q y un alambre con densidad lineal de carga 2λ. Calcular:
a) la fuerza eléctrica ejercida sobre la carga puntual.
b) la fuerza eléctrica ejercida sobre el alambre.



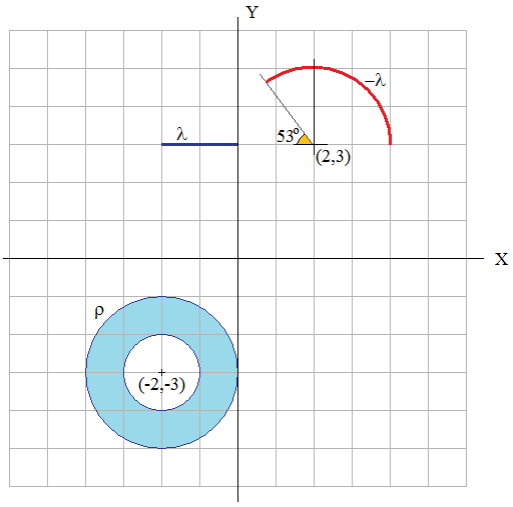
Problema 4.- Se muestra una esfera de radio r con densidad de carga ρ, un arco de circunferencia de densidad de carga -λ y un alambre rectilíneo con densidad de carga λ y longitud a. Hallar la fuerza eléctrica sobre una carga puntual Q.



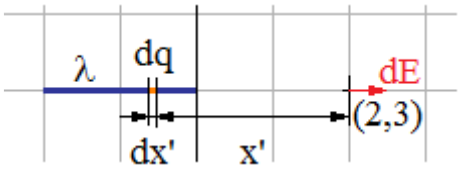
Problema 5.- Hallar el campo eléctrico en el punto (2,3) producido por

a) El alambre recto de densidad de carga λ
b) El alambre curvo de densidad –λ

c) La esfera hueca con densidad de carga en el rango r = [2 4] de $\rho = \frac{\rho_o}{2\pi r^2}$



Solución:
a) Para el alambre recto, ya que la densidad de carga es positiva, el campo será dirigido a la derecha, en la dirección x-positiva.
Para hacer el cálculo dividimos el alambre en diferenciales de longitud dx' con una carga cada uno de $\lambda dx'$ y llamamos la distancia de la carga al punto (2,3) x', como se indica en el diagrama:



El diferencial de campo eléctrico es

$$dE = k\frac{dq}{x'^2} = k\frac{\lambda dx'}{x'^2}$$

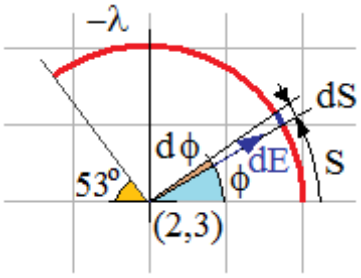
Para hallar el campo total integramos desde 2m hasta 4m que son los límites de la variable x'

$$E = \int_2^4 k\frac{\lambda dx'}{x'^2} = \frac{k\lambda}{4}$$

Este campo eléctrico es en la dirección x-positiva, por lo que el vector es

$$\vec{E} = \left(\frac{k\lambda}{4}, 0\right)$$

b) Para el alambre curvo seguimos un procedimiento semejante. Dividimos el alambre en diferenciales de arco con diferencial de carga dq. En este caso sin embargo hay que tener en cuenta que la dirección del vector cambia de acuerdo con el ángulo por lo que debemos integrar separadamente la componente-x y la componente-y



El diferencial de longitud de arco es $dS = Rd\phi = 2d\phi$ y por lo tanto el diferencial de carga es $dq = -2\lambda d\phi$

El signo de la carga indica que el vector diferencial de campo eléctrico debe dirigirse *hacia* ella como se indica en el diagrama. Su módulo es

$$dE = k\frac{dq}{R^2} = k\frac{2\lambda d\phi}{R^2} = k\frac{2\lambda d\phi}{2^2} = k\frac{\lambda d\phi}{2}$$

Debemos descomponer este vector en dos partes:

$$dE_x = k\frac{\lambda d\phi}{2}\cos\phi$$
$$dE_y = k\frac{\lambda d\phi}{2}\sin\phi$$

Al integrar hallamos los valores de los dos componentes:

$$E_x = \int_0^{127^o} \frac{k\lambda d\phi}{2}\cos\phi = \frac{k\lambda}{2}(\sin 127^o - \sin 0^o) = \frac{k\lambda}{2}(0.8)$$
$$E_y = \int_0^{127^o} \frac{k\lambda d\phi}{2}\sin\phi = \frac{k\lambda}{2}(-\cos 127^o + \cos 0^o) = \frac{k\lambda}{2}(1.6)$$

Por tanto, el vector será

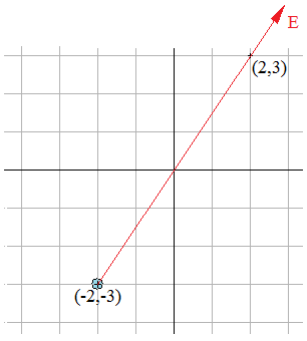
$$\vec{E} = (0.4k\lambda, 0.8k\lambda)$$

c) Para la esfera hueca podemos usar el teorema de Gauss y considerar como si toda la carga estuviera en el centro de la esfera. Como la esfera no tiene densidad constante, calcularemos la carga por integración:

$$Q = \int_{R1}^{R2} \rho dV = \int_1^2 \frac{\rho_o}{2\pi r^2} 4\pi r^2 dr = \int_1^2 2\rho_o dr = 2\rho_o$$

Notar que el diferencial de volumen usado es $dV = 4\pi r^2 dr$

La esfera hueca se puede reemplazar por esta carga ubicada en su centro como se indica en el diagrama.



El módulo del vector campo eléctrico es

$$E = k\frac{Q}{d^2} = 9\times10^{-9}\frac{2\rho_o}{4^2+6^2} = \frac{9}{26}\times10^{-9}\rho_o$$

Luego lo descomponemos en sus partes:

$$E_x = \frac{9}{26}\times10^{-9}\rho_o\frac{4}{\sqrt{52}}$$
$$E_y = \frac{9}{26}\times10^{-9}\rho_o\frac{6}{\sqrt{52}}$$

Y el vector es

$$\vec{E} = \frac{9}{13\sqrt{52}}\times10^{-9}\rho_o(2,3)$$

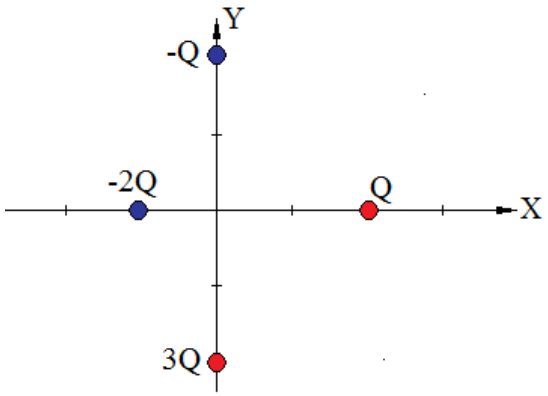
Problema 6.- En la figura se muestran cuatro cargas:

-Q ubicada	en	(0, 2m),
+Q	en	(2m, 0),
-2Q	en	(-1m, 0) y
3Q	en	(0, -2m).

Calcular:

a) La componente horizontal (E_x) del campo eléctrico en el origen de coordenadas (0,0)
b) La componente vertical (E_y) del campo eléctrico en el origen de coordenadas (0,0)
c) La magnitud del campo eléctrico en el origen de coordenadas (0,0)

Responder en términos de Q y k (9×10^9)



Solución:

a) Solo las cargas -2Q y +Q producen campo eléctrico horizontal en el origen. Su valor es

$$E_x = -k\frac{2Q}{1^2} - k\frac{Q}{2^2} = \mathbf{-2.25}\,kQ$$

Notar que el signo indica la dirección del vector, siendo ambos componentes hacia la izquierda.

b) En la dirección vertical las cargas a tomar en cuenta son –Q y 3Q por lo tanto

$$E_y = k\frac{3Q}{2^2} + k\frac{Q}{2^2} = \mathbf{1}\,kQ$$

c) La magnitud del vector la hallamos con la ecuación:

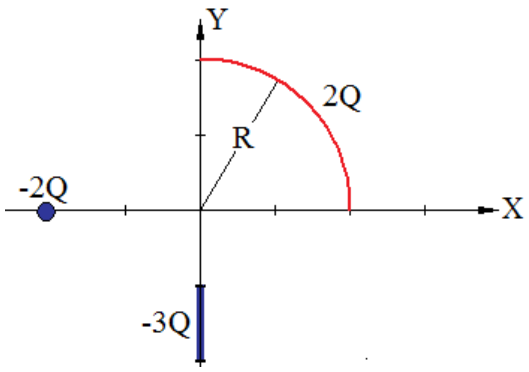
$$E = \sqrt{2.25^2 + 1^2}\,kQ = \mathbf{2.46}\,kQ$$

Problema 7.- En la figura se muestra
- una carga puntual de valor –Q en la posición (-2m,0)
- un arco de circunferencia de 90 grados con radio R=2m centrado en el origen de coordenadas y carga uniformemente distribuida sobre su longitud igual a +2Q
- Un hilo de 1m de longitud ubicado verticalmente entre los puntos (0,-1m) y (0,-2m) con carga de -3Q distribuida uniformemente en su longitud.

Hallar el campo eléctrico en el origen de coordenadas causado por

a) La carga puntual.
b) El arco de circunferencia
c) El hilo cargado.

Responder en términos de Q y k (9×10^9)



Solución:

a) La carga puntual producirá un campo eléctrico dirigido hacia la izquierda, por lo que solo existe la componente horizontal:

$$E_x = -k\frac{2Q}{2^2} = \mathbf{-1}\,kQ$$

Mientras que en la dirección vertical:

$$E_y = \mathbf{0}$$

b) El arco de circunferencia puede ser dividido en diferenciales de longitud para luego integrar las componentes. Debido a la simetría del problema es posible hacer esto para una sola componente, ya que la otra será igual.

$$dE_x = k\cos\theta\frac{dQ}{d^2}$$

$$\rightarrow E_x = -k\frac{2Q}{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos\theta d\theta}{2^2} = -\frac{kQ}{\pi} = \mathbf{-0.318}\,kQ$$

$$E_y = -\frac{kQ}{\pi} = \mathbf{-0.318}\,kQ$$

b) Para el caso del hilo lo dividimos en diferenciales de longitud e integramos. En este caso la componente horizontal es cero

$$E_x = \mathbf{0}$$

Pero la componente vertical es hacia abajo con un valor de

$$E_y = -k\frac{3Q}{1}\int_1^2\frac{dy}{y^2} = -\frac{k3Q}{2\times1} = \mathbf{-1.5}\,kQ$$

Problema 8.- Se tienen 3 cargas idénticas de valor $q = 1\mu C$ ubicadas en las esquinas de un triángulo equilátero de lado d=0.2m. Calcular la fuerza sobre una de las cargas.

Solución:

Las fuerzas producidas por cualquiera de los pares de cargas serán:

$$F = k\frac{q^2}{d^2} = 9\times10^9\,\frac{Nm^2}{C^2}\frac{(1\times10^{-6}C)^2}{(0.2m)^2} = 0.225N$$

Al sumarlas hay que tener en cuenta que el ángulo entre los vectores es 60º, entonces:

$$F = \sqrt{0.225^2 + 0.225^2 + 2\times\cos60^\circ\times0.225\times0.225}\quad F = 0.389N$$

Problema 9.- Se tiene un cilindro con carga uniforme de $Q = 1nC$ en todo el volumen. Radio $R = 0.1m$, altura $h = 4m$ y se desea calcular el campo eléctrico en un punto sobre el eje del cilindro a una distancia de 10m de su base.

Solución:
Dado que el cilindro es tan angosto se puede aproximar como una línea de carga de densidad lineal:

$$\lambda = \frac{1nC}{4m} = 0.25nC/m$$

Dividimos su altura en pequeños discos y calculamos el campo eléctrico de esa carga

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_\circ}\frac{\lambda dz}{(10-z)^2}$$

Integramos

$$E = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_\circ}\int_0^h \frac{dz}{(10-z)^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_\circ}\left(\frac{1}{(10-h)} - \frac{1}{10}\right)$$

Con los valores del problema

$$E = 0.15V/m$$