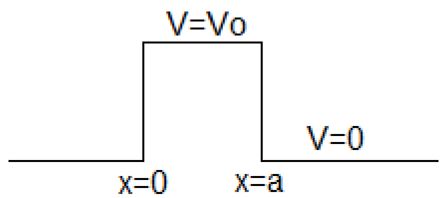
# Cursos de Ciencia

## Nanotecnología

### Efecto Túnel

Consideremos una barrera de potencial de forma rectangular como se muestra en la figura:




***Primer caso***: Digamos que la energía total de la partícula es mayor al potencial $V_0$, por lo que la solución puede escribirse como:

$$\psi(x)=\begin{cases} Ae^{ik_1x}+Be^{-ik_1x} & x<0 \\ Ce^{ik_2x}+De^{-ik_2x} & 0<x<a \\ Fe^{ik_1x} & x>a \end{cases}$$

Donde

$$k_1=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_2=\frac{\sqrt{2m(E-V_O)}}{\hbar}$$

Podemos interpretar A como la amplitud de la partícula incidente desde la izquierda, B la amplitud reflejada, C y D son las amplitudes de la partícula dentro de la barrera de potencial y F es la amplitud asociada con movimiento más allá de la barrera.

Para encontrar una relación entre las amplitudes debemos que recordar que las funciones deben ser continuas en x=0 y x=a, por lo que:

$$A+B=C+D$$

$$Ce^{ik_2a}+De^{-ik_2a}=Fe^{ik_1a}$$

Adicionalmente las primeras derivadas también deben ser continuas:

$$Ak_1-Bk_1=Ck_2-Dk_2$$

$$Ck_2e^{ik_2a}-Dk_2e^{-ik_2a}=Fk_1e^{ik_1a}$$

Tomemos la amplitud A como un valor dado y escribimos las cuatro ecuaciones en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & e^{ik_2a} & e^{-ik_2a} & -e^{ik_1a} \\ k_1 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2e^{ik_2a} & -k_2e^{-ik_2a} & -k_1e^{ik_1a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ Ak_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos resolver el problema usando determinantes. Calculemos el valor de F:

$$F = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & A \\ 0 & e^{ik_2a} & e^{-ik_2a} & 0 \\ k_1 & k_2 & -k_2 & Ak_1 \\ 0 & k_2e^{ik_2a} & -k_2e^{-ik_2a} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & e^{ik_2a} & e^{-ik_2a} & -e^{ik_1a} \\ k_1 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2e^{ik_2a} & -k_2e^{-ik_2a} & -k_1e^{ik_1a} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{\mathrm{T} = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^{\,2}}{4E(E - V_0)} \sin^2 k_2 a}}$$

***Segundo caso***: Digamos que la energía total de la partícula es menor al potencial $V_0$, por lo que la solución puede escribirse como:

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} & x < 0 \\ Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} & 0 < x < a \\ Fe^{ik_1x} & x > a \end{cases}$$

Donde

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

Podemos interpretar las amplitudes como en el caso anterior y encontrar una relación entre ellas con las ecuaciones de continuidad:

$$A + B = C + D$$

$$Ce^{k_2a} + De^{-k_2a} = Fe^{ik_1a}$$

Adicionalmente las primeras derivadas también deben ser continuas:

$$Aik_1 - Bik_1 = Ck_2 - Dk_2$$
$$Ck_2 e^{k_2 a} - Dk_2 e^{-k_2 a} = Fik_1 e^{ik_1 a}$$

Tomemos la amplitud A como un valor dado y escribimos las cuatro ecuaciones en forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & e^{k_2 a} & e^{-k_2 a} & -e^{ik_1 a} \\ ik_1 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 e^{k_2 a} & -k_2 e^{-k_2 a} & -ik_1 e^{ik_1 a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ C \\ D \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ 0 \\ Aik_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ahora podemos resolver el problema usando determinantes. Calculemos el valor de F:

$$F = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & A \\ 0 & e^{k_2 a} & e^{-k_2 a} & 0 \\ ik_1 & k_2 & -k_2 & Aik_1 \\ 0 & k_2 e^{k_2 a} & -k_2 e^{-k_2 a} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & e^{k_2 a} & e^{-k_2 a} & -e^{ik_1 a} \\ ik_1 & k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & k_2 e^{k_2 a} & -k_2 e^{-k_2 a} & -ik_1 e^{ik_1 a} \end{vmatrix}}$$

$$\boxed{T = \left|\frac{F}{A}\right|^2 = \frac{1}{1 + \dfrac{V_0^{\;2}}{4E(V_0 - E)} \sinh^2 k_2 a}}$$